# Ejercicios 15.4

## Curvaturas de líneas — Soluciones detalladas paso a paso

En este documento se muestran los pasos completos y las operaciones realizadas para calcular la curvatura κ en los puntos indicados de los ejercicios pares (8, 10, 12, 14, 16 y 18).

### Fórmulas útiles

1) Para una curva dada por y = f(x):  
 κ(x) = |y''(x)| / (1 + (y'(x))^2)^{3/2}

2) Para una curva paramétrica x = x(t), y = y(t):  
 κ(t) = | x'(t) y''(t) − y'(t) x''(t) | / ( x'(t)^2 + y'(t)^2 )^{3/2}

### Ejercicio 8 — y = x^4, P(1,1)

Enunciado: y = x^4. Punto: P(1,1).

Lo que voy a hacer: aplicar la fórmula para y = f(x).

Paso 1 — derivadas: y' = d/dx (x^4) = 4 x^3. y'' = d/dx (4 x^3) = 12 x^2.

Paso 2 — evaluar en x = 1: y'(1) = 4 \* 1^3 = 4. y''(1) = 12 \* 1^2 = 12.

Paso 3 — sustituir en la fórmula: κ(1) = |y''(1)| / (1 + (y'(1))^2)^{3/2} = 12 / (1 + 4^2)^{3/2}.

Paso 4 — calcular el denominador: 1 + 4^2 = 1 + 16 = 17. Entonces (17)^{3/2} = 17 \* √17.

Resultado final: κ(1) = 12 / 17^{3/2} (se puede dejar así o escribir κ = 12 / (17·√17)).

K=

### Ejercicio 10 — y = ln(x−1), P(2,0)

Enunciado: y = ln(x − 1). Punto: P(2,0).

Lo que voy a hacer: aplicar la fórmula para y = f(x).

Paso 1 — derivadas: y' = d/dx [ln(x−1)] = 1/(x−1). y'' = d/dx [1/(x−1)] = −1/(x−1)^2.

Paso 2 — evaluar en x = 2: y'(2) = 1/(2−1) = 1. y''(2) = −1/(2−1)^2 = −1.

Paso 3 — sustituir en la fórmula: κ(2) = |y''(2)| / (1 + (y'(2))^2)^{3/2} = |−1| / (1 + 1^2)^{3/2} = 1 / (2^{3/2}).

Paso 4 — simplificar 2^{3/2}: 2^{3/2} = (√2)^3 = 2·√2. Entonces κ = 1 / (2·√2).

Paso 5 — forma racionalizada (opcional): multiplicamos numerador y denominador por √2 → (√2) / (2·2) = √2 / 4.

Resultado final: κ(2) = 1 / (2^{3/2}) = 1/(2·√2)

K=

### Ejercicio 12 — y = sec x, P(π/3,2)

Enunciado: y = sec x. Punto: P(π/3, 2) (nota: sec(π/3) = 2 → y = 2).

Lo que voy a hacer: aplicar la fórmula para y = f(x).

Paso 1 — derivadas: y' = d/dx(sec x) = sec x · tan x.

y'' = d/dx(sec x · tan x) = (sec x tan x)' = (sec x)'·tan x + sec x·(tan x)'

= sec x·tan x·tan x + sec x·sec^2 x = sec x·tan^2 x + sec^3 x.

Paso 2 — evaluar en x = π/3: cos(π/3)=1/2 → sec=2; tan(π/3)=√3.

y'(π/3) = sec·tan = 2·√3 = 2√3.

y''(π/3) = sec·tan^2 + sec^3 = 2·(√3)^2 + 2^3 = 2·3 + 8 = 6 + 8 = 14.

Paso 3 — sustituir en la fórmula: κ(π/3) = |y''| / (1 + (y')^2)^{3/2} = 14 / (1 + (2√3)^2)^{3/2}.

Paso 4 — calcular (2√3)^2 = 4·3 = 12. Entonces 1 + 12 = 13. Denominador = 13^{3/2}.

Resultado final: κ(π/3) = 14 / 13^{3/2}.

### Ejercicio 14 — x=t+1, y=t^2+4t+3, P(1,3)

Enunciado (paramétrica): x = t + 1, y = t^2 + 4t + 3. Punto: P(1,3).

Lo que voy a hacer: usar la fórmula paramétrica κ(t) = |x' y'' − y' x''| / (x'^2 + y'^2)^{3/2}.

Paso 1 — encontrar t en el punto P: x = t + 1 = 1 ⇒ t = 0. Comprobación: y(0) = 0^2 + 4·0 + 3 = 3 → OK.

Paso 2 — derivadas: x' = 1, x'' = 0. y' = 2t + 4, y'' = 2.

Paso 3 — evaluar en t = 0: x'(0)=1, x''(0)=0, y'(0)=2·0 + 4 = 4, y''(0)=2.

Paso 4 — calcular numerador: x' y'' − y' x'' = 1·2 − 4·0 = 2.

Paso 5 — calcular denominador: x'^2 + y'^2 = 1^2 + 4^2 = 1 + 16 = 17 → (17)^{3/2}.

Resultado final: κ(0) = 2 / 17^{3/2}.

### Ejercicio 16 — x=t−sen t, y=1−cos t, P(π/2−1,1)

Enunciado (paramétrica): x = t − sen t, y = 1 − cos t. Punto: P(π/2 − 1, 1) → corresponde a t = π/2.

Lo que voy a hacer: usar la fórmula paramétrica κ(t) = |x' y'' − y' x''| / (x'^2 + y'^2)^{3/2}.

Paso 1 — derivadas:

x' = d/dt (t − sin t) = 1 − cos t.

x'' = d/dt (1 − cos t) = sin t.

y' = d/dt (1 − cos t) = sin t.

y'' = d/dt (sin t) = cos t.

Paso 2 — calcular numerador simbólicamente:

x' y'' − y' x'' = (1 − cos t)·cos t − (sin t)·(sin t) = cos t − cos^2 t − sin^2 t.

Usamos sin^2 t + cos^2 t = 1 → cos^2 t + sin^2 t = 1, así que la expresión queda cos t − 1 = −(1 − cos t).

Tomando valor absoluto: |cos t − 1| = 1 − cos t (ya que cos t ≤ 1 siempre).

Paso 3 — calcular denominador simbólicamente:

x'^2 + y'^2 = (1 − cos t)^2 + (sin t)^2 = 1 − 2 cos t + cos^2 t + sin^2 t = 2 − 2 cos t = 2(1 − cos t).

(x'^2 + y'^2)^{3/2} = [2(1 − cos t)]^{3/2} = 2^{3/2} (1 − cos t)^{3/2}.

Paso 4 — simplificar κ(t):

κ(t) = (1 − cos t) / [ 2^{3/2} (1 − cos t)^{3/2} ] = 1 / [ 2^{3/2} (1 − cos t)^{1/2} ].

Paso 5 — evaluar en t = π/2: cos(π/2) = 0 → 1 − cos t = 1.

κ(π/2) = 1 / 2^{3/2} = 1 / (2·√2) = √2 / 4 (forma racionalizada).

Resultado final: κ(π/2) = 1 / 2^{3/2}

### Ejercicio 18 — x=cos^3 t, y=sen^3 t, P(√2/4,√2/4)

Enunciado (paramétrica): x = cos^3 t, y = sen^3 t. Punto: P(√2/4, √2/4) → corresponde a t = π/4.

Lo que voy a hacer: usar la fórmula paramétrica κ(t) = |x' y'' − y' x''| / (x'^2 + y'^2)^{3/2} y simplificar con identidades trigonométricas.

Paso 1 — derivadas (calcular cuidadosamente):

x = cos^3 t → x' = 3 cos^2 t · (−sin t) = −3 cos^2 t sin t.

x'' = d/dt(−3 cos^2 t sin t) = −3·[ (−2 cos t sin t)·sin t + cos^2 t·cos t ]

= −3·[ −2 cos t sin^2 t + cos^3 t ] = 6 cos t sin^2 t − 3 cos^3 t.

y = sin^3 t → y' = 3 sin^2 t cos t.

y'' = d/dt(3 sin^2 t cos t) = 3·[ (2 sin t cos t)·cos t + sin^2 t·(−sin t) ]

= 3·[ 2 sin t cos^2 t − sin^3 t ] = 6 sin t cos^2 t − 3 sin^3 t.

Paso 2 — calcular el numerador: x' y'' − y' x''. Haciendo las multiplicaciones y factorizando se obtiene:

Después de expandir y agrupar términos se llega a x' y'' − y' x'' = −9 cos^2 t sin^2 t.

Tomando valor absoluto → |x' y'' − y' x''| = 9 cos^2 t sin^2 t.

(En el documento de trabajo esto se muestra desarrollando los términos; aquí se resume el factor común final).

Paso 3 — calcular x'^2 + y'^2:

x'^2 + y'^2 = 9 cos^4 t sin^2 t + 9 sin^4 t cos^2 t = 9 cos^2 t sin^2 t (cos^2 t + sin^2 t) = 9 cos^2 t sin^2 t.

Entonces (x'^2 + y'^2)^{3/2} = (9 cos^2 t sin^2 t)^{3/2} = 27 cos^3 t sin^3 t (tomando cos t, sin t ≥ 0 en t = π/4).

Paso 4 — formar κ(t): κ(t) = [9 cos^2 t sin^2 t] / [27 cos^3 t sin^3 t] = (9/27)·1/(cos t sin t) = (1/3)·1/(cos t sin t).

Paso 5 — evaluar en t = π/4: cos(π/4) = sin(π/4) = 1/√2 ⇒ cos t sin t = (1/√2)·(1/√2) = 1/2.

κ(π/4) = (1/3)·1/(1/2) = (1/3)·2 = 2/3.

Resultado final: κ(π/4) =

# Cálculo con Geometría Analítica — Ejercicios 15.5

### Ejercicio 1

Paso 1 — v = <2t, 3>, a = <2, 0>.

Paso 2 — ||v|| = √(4t^2+9).

Paso 3 — v·a = 4t.

Paso 4 —

Paso 5 —

Resultado:.

### Ejercicio 2

r(t) = (2t^2 − 1) i + 5t j.

Paso 1 — v = <4t, 5>, a = <4, 0>.

Paso 2 —

Paso 3 — v·a = 16t.

Paso 4 —

Paso 5 — ||a||=4, entonces a\_N = √(16 − (256t^2)/(16t^2+25)) = 20/√(16t^2+25).

Resultado: a\_T = 16t/√(16t^2+25), a\_N = 20/√(16t^2+25).

### Ejercicio 3

r(t) = 3t i + t^3 j + 3t^2 k.

Paso 1 — v = <3, 3t^2, 6t>, a = <0, 6t, 6>.

Paso 2 — ||v|| = 3√(t^4+4t^2+1).

Paso 3 — v·a = 18t^3+36t = 18t(t^2+2).

Paso 4 — a\_T = (18t(t^2+2))/(3√(t^4+4t^2+1)) = 6t(t^2+2)/√(t^4+4t^2+1).

Paso 5 — ||v×a|| = 18√(t^4+t^2+1).

Paso 6 — a\_N = (||v×a||)/||v|| = 6√(t^4+t^2+1)/√(t^4+4t^2+1).

Resultado:

### Ejercicio 4

r(t) = 4t i + t^2 j + 2t^2 k.

Paso 1 — v = <4, 2t, 4t>, a = <0, 2, 4>.

Paso 2 —

Paso 3 — v·a = 4\*0 + 2t\*2 + 4t\*4 = 4t+16t = 20t.

Paso 4 — a\_T = 20t/(2√(5t^2+4)) = 10t/√(5t^2+4).

Paso 5 — ||a|| = √(0^2+2^2+4^2) = √20 = 2√5.

Paso 6 — a\_N = √(||a||^2 − a\_T^2) = √(20 − (100t^2)/(5t^2+4)).

Simplifico: a\_N = 4√(5)/(√(5t^2+4)).

Resultado:

### Ejercicio 5

r(t) = (cos t) i + (sen t) j.

Paso 1 — v = <−sin t, cos t>, a = <−cos t, −sin t>.

Paso 2 — ||v|| = √(sin^2 t+cos^2 t)=1.

Paso 3 —

Paso 4 — a\_T=0.

Paso 5 — ||a||=√(cos^2 t+sin^2 t)=1.

Paso 6 —

Resultado:

### Ejercicio 6

Paso 1 — v = <sinh t, cosh t>, a = <cosh t, sinh t>.

Paso 2 — ||v||=√(sinh^2+cosh^2)=√(cosh(2t)).

Paso 3 — v·a = sinh t cosh t + cosh t sinh t = 2 sinh t cosh t = sinh(2t).

Paso 4 — a\_T = sinh(2t)/√(cosh(2t)).

Paso 5 —

Paso 6 —

a\_T^2 = sinh^2(2t)/cosh(2t).

Entonces

### Ejercicio 7

r(t) = 4 cos t i + 9 sen t j + t k.

Paso 1 — v = <−4 sin t, 9 cos t, 1>, a = <−4 cos t, −9 sin t, 0>.

Paso 2 — ||v|| = √(16 sin^2 t + 81 cos^2 t + 1).

Paso 3 — v·a = (−4 sin t)(−4 cos t) + (9 cos t)(−9 sin t)+1\*0 = 16 sin t cos t −81 sin t cos t.

= (−65) sin t cos t.

Paso 4 — a\_T = (−65 sin t cos t)/√(16 sin^2 t + 81 cos^2 t + 1).

Paso 5 —

Paso 6 —

Resultado:

### Ejercicio 8

r(t) = e^t (sen t i + cos t j + k).

Paso 1 — r(t) = <e^t sin t, e^t cos t, e^t>.

Paso 2 — v = <e^t(sin t + cos t), e^t(cos t − sin t), e^t>.

Paso 3 —

y

Entonces a = <2e^t cos t, −2e^t sin t, e^t>.

Paso 4 —

Paso 5 —

Paso 6 —

Paso 7 —

Resultado